Esercitazione 5: Greedy Algorithms

Giacomo Paesani

April 9, 2025

Esercizio 1. [16.1-2:3, [1]] Consideriamo il problema di trovare un sottoinsieme di cardinalità massima di intervalli disgiunti da un insieme qualsiasi di intervalli $\{a_i = [s_i, f_i]\}$. Un algoritmo greedy che produce una soluzione ottima consiste nel selezionare ad ogni passo un intervallo, tra quelli che sono disgiunti con quelli precedentemente scelti, che (0) ha l'estremo destro di valore minimo.

Consideriamo alternative idee per un algoritmo greedy per lo stresso problema. Selezionare ad ogni passo un intervallo, tra quelli che sono disgiunti con quelli precedentemente scelti, che:

(1) ha l'estremo sinistro di valore massimo.

(2) ha o l'estremo destro di valore minimo o l'estremo sinistro di valore massimo.

(3) ha ampiezza $f_i - s_i$ minima.

(4) interseca il numero minimo di intervalli rimanenti.

(5) ha l'estremo sinistro di valore minimo.

Per ogniuna di queste soluzioni proposte dimostrare che esse producono sempre soluzioni ottime o fornire un contro-esempio in cui la soluzione ottenuta non è ottima.

Esercizio 2 (16.1-4, [1])**.** Sia A un insieme, una *partizione* di A è una collezione $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di A tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e $\bigcup A_i = A$. Fornire un algoritmo in pseudo-codice che, data una collezione di intervalli $A = \{a_i = [s_i, f_i]\}$, determina il numero minimo di sottoinsiemi $A_i \subseteq A$ che formano una partizione di A tali che in ogni sottoinsieme A_i gli intervalli sono due a due disgiunti. Tempo di esecuzione $\mathcal{O}(|A|^2)$.

Definizione. Sia $G = (V, E)$; allora:

- un *taglio* $(S, V \setminus S)$ è una partizione di V;
- un arco uv *attraversa* un taglio $(S, V \setminus S)$ se uno dei suoi estremi è in S e l'altro in $V \setminus S$;
- un taglio *rispetta* un insieme di archi A se nessun arco di A attraversa il taglio;
- un arco si dice *leggero* per un taglio se ha peso minimo tra quelli che attraversano il taglio.

Infine, sia $A \subseteq E$ un insieme di archi contenuto in un albero di copertura di peso minimo di G. Un arco e è *sicuro* per A se $A \cup \{e\}$ è ancora contenuto in un albero di copertura di peso minimo di G.

Teorema (Teorema dell'arco leggero)**.** Sia $G = (V, E)$ e $A \subseteq E$ un insieme di archi contenuto in un albero di copertura di peso minimo di G e sia $(S, V \setminus S)$ un qualsiasi taglio di G che rispetta A. Allora un arco leggero che attraversa il taglio è sicuro per A.

Esercizio 3 (23.1-1, [1])**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto e connesso con gli archi pesati. Dimostrare o confutare con un contro-esempio la seguente affermazione: se uv è un arco di peso minimo, allora esiste un albero di copertura di peso minimo di G che contiene l'arco uv.

Esercizio 4 (23.1-2:3, [1])**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo, dimostrare o confutare con un contro-esempio le seguenti affermazioni.

(1) Sia $A \subseteq E$ un insieme di archi contenuto in un albero di copertura di peso minimo di G e sia $(S, V \setminus S)$ un qualsiasi taglio di G che rispetta A. Un arco sicuro per A che attraversa il taglio è necessariamente leggero.

(2) Sia uv un arco che appartiene a qualche albero di copertura di peso minimo di G. Allora uv è leggero per un qualche taglio $(S, V \setminus S)$ di G.

Esercizio 5 (I. Salvo)**.** Sia $G = (V, E)$ un grafo non diretto, connesso e con gli archi pesati con pesi tutti diversi e positivi. Sia T un albero di copertura di peso minimo di G, s un vertice di G e T_s l'albero dei cammini minimi da s verso tutti gli altri nodi di G. Dimostrare o confutare con un contro-esempio che T_s e T condividono almeno un arco.

References

[1] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2022.