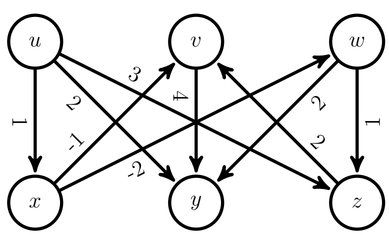
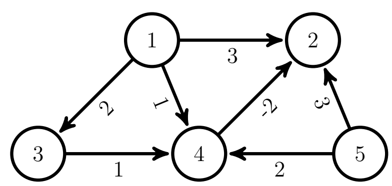
Esercitazione 9: All-Pairs Shortest Paths and More

Giacomo Paesani

May 12, 2025

Esercizio 1. Il problema All-Pairs Shortest Path consiste nel ottenere il peso di un cammino minimo per ogni coppia di vertici di un grafo, cioè dato un grafo diretto $G = (V, E)$, la richiesta è quella di ottenere per ogni due vertici $u, v \in V$, il cammino di peso minimo da u a v. Risolvere questo problema fornendo la matrice dei cammini e dei padri per ognuno dei seguenti grafi:





Esercizio 2 (25.2-6, [1])**.** Modificare lo pseudo-codice dell'algoritmo di Floyd-Warshall per individuare, se esiste, un ciclo di peso negativo nel grafo in esame. Inoltre, fornire lo pseudo-codice di un algoritmo che, se esiste, ritorna la lunghezza minima di un ciclo di peso negativo con un costo computazionale di $\mathcal{O}(|V|^4)$.

Esercizio 3 (25.2-8, [1])**.** Dato un grafo diretto $G = (V, E)$, la chiusura transitiva di G è un grafo $G^* = (V, E^*)$ tale che $(u, v) \in E^*$ se e solo se esiste un cammino da u a v in G. Fornire un algoritmo per calcolare la chiusura transitiva di un grafo diretto $G = (V, E)$ in maniera che il tempo di esecuzione sia $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Esercizio 4 (M. Lauria)**.** Si considera una griglia $n \times n$ con $n > 0$. Un cammino su questa griglia deve partire dalla cella di coordinate $(0, 0)$ in alto a sinistra e deve arrivare alla posizione di coordinate $(n-1, n-1)$ in basso a destra. E' possibile muoversi solo su celle adiacenti, andando di un passo verso il basso o di un passo verso destra. Inoltre, sono vietati i cammini che toccano le celle di coordinate (i, j) con $i > j$, cioè non è permesso andare sotto la diagonale che va da $(0, 0)$ a $(n-1, n-1)$. Fornire in pseudo-codice un algoritmo che calcoli il numero di cammini validi con un tempo di esecuzione $\mathcal{O}(n^2)$.

References

[1] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2022.