Esercitazione 1: Depth-First Search

Giacomo Paesani

March 12, 2025

Esercizio 1. Un grafo diretto $G = (V, E)$ si dice diretto aciclico (DAG) se G non contiene alcun ciclo diretto. Modificare l'algoritmo della ricerca in profondità in maniera da poter controllare se un grafo diretto è aciclico o no; è possibile fare questa modifica in modo che il controllo avvenga in $\Theta(|V| + |E|)$?

Soluzione 1. Per risolvere questo esercizio è necessaria la seguente affermazione: un grafo diretto è aciclico se e solo se in un qualsiasi albero di ricerca in profondità non c'è un arco all'indietro.

L'Algoritmo 1 è una delle possibile soluzioni: il codice è inspirato all'algoritmo ricorsivo di ricerca in profondità proposto in [1]. Notiamo come tale algoritmo è stato modificato per controllare se il grafo diretto in esame è aciclico o no. Supponiamo che durante l'algoritmo viene trovato un arco (u, v) all'indietro (linea 22) allora la variabile *test* viene posta `FALSE` e ritornata subito. Questo vuol dire che la chiamata alla funzione **DFS-Visit** con input (G, z), dove z è l'antenato dell'albero che è anche radice di u, ritorna `FALSE` in linea 12 e quindi la funzione **DFS** con input G ritorna subito `FALSE`.

Supponiamo ora che la condizione in linea 22 non viene mai soddisfatta e quindi che non vi sono archi all'indietro. Allora la variabile *test* assume sempre il valore `TRUE` e quindi anche l'output di **DFS**(G) è `TRUE`. □

Algorithm 1 DFS modificata per controllare se un grafo diretto è aciclico o no.

```
1: global variables
2:     Color ↤ array di |V| elementi
3:     Parent ↤ array dei padri
4: end global variables
Input: grafo diretto G = (V, E).
Output: TRUE se G è aciclico e FALSE altrimenti.
5: function DFS(G)
6:     test=TRUE
7:     for u ∈ V do
8:         Color[u]=BIANCO
9:     for u ∈ V do
10:        if Color[u]==BIANCO then
11:            Parent[u] = u
12:            test=DFS-Visit(G,u)
13:            if test=FALSE then
14:                return FALSE
15:    return TRUE
16: function DFS-Visit(G,u)
17:    Color[u]=GRIGIO
18:    for v ∈ Adj[u] do
19:        if Color[v]==BIANCO then
20:            Parent[v] = u
21:            test=DFS-Visit(G,v)
22:        if Color[v]==GRIGIO then
23:            test=FALSE
24:            return test
25:    Color[u]=NERO
26:    return test
```

Esercizio 2. Un grafo $G = (G, E)$ non diretto dice bipartito se l'insieme dei vertici V può essere partizionato in due insiemi disgiunti U e W tali che: (1) $U \cap W = \emptyset$, (2) $U \cup W = V$ e (3) ogni arco di G è incidente ad un vertice di U e ad vertice di W. E' noto che un grafo G è bipartito se e solo se G non ha cicli di lunghezza dispari. Modificare l'algoritmo della ricerca in profondità in maniera da poter controllare se un grafo non diretto è bipartito o no, e in caso fornire una bipartizione; è possibile fare questa modifica in modo che il controllo avvenga in $\Theta(|V| + |E|)$? Domanda bonus: nel caso in cui G

non è bipartito, come deve essere ulteriormente modificato l'algoritmo per ritornare un ciclo dispari di G?

Soluzione 2. L'idea principale è di assegnare un valore, 0 o 1, ad ogni vertice nel momento che viene visitato per la prima volta in maniera che tale valore sia diverso dal valore del padre nella ricerca. Se durante lo svolgimento dell'algoritmo si crea un arco che ha i due estremi con lo stesso valore, allora questo fatto certifica l'esistenza di un ciclo di lunghezza dispari nel grafo.

L'Algoritmo 2 è una delle possibile soluzioni: il codice è inspirato all'algoritmo ricorsivo di ricerca in profondità proposto in [1]. Notiamo come tale algoritmo è stato modificato non solo per controllare se il grafo non diretto in esame è bipartito o no, ma anche per fornire una prova di questo fatto. L'array $Parity$ ha l'obbiettivo di salvare la parità o disparità della lunghezza del cammino dal vertice di partenza della ricerca ad ogni vertice nel albero di ricerca. Per il vertice di partenza della ricerca z, $Parity[z]$ è inizializzato come 0 in maniera arbitraria (linea 15). Sia ora v un vertice diverso da quello di partenza. Se v viene visitato per la prima volta a partire da un nodo u allora si pone $Parity[v] = 1 - Parity[u]$ in maniera che questi valori siano distinti (linea 25). Supponiamo in fine che v è stato già visitato in passato (quindi $Color[v]$ è GRIGIO o NERO e $Parity[v]$ è già stato determinato) e c'è un arco dal corrente vertice u a v allora l'arco (u, v) forma, insieme al cammino da u a v nell'albero di ricerca, un ciclo C. La parità di C può essere facilmente determinata paragonando $Parity[u]$ e $Parity[v]$ (linea 30): se questi due valori sono uguali allora C ha lunghezza dispari e se sono diversi C ha lunghezza pari.

Supponiamo che la condizione in linea 30 viene soddisfatta da un arco (u, v) e quindi la variabile *test* diventa `FALSE`. A questo punto la condizione in linea 17 viene soddisfatta e l'algoritmo correttamente ritornerà che il grafo G non è bipartito.

Algorithm 2 DFS modificata per controllare se un grafo non diretto è bipartito o no.

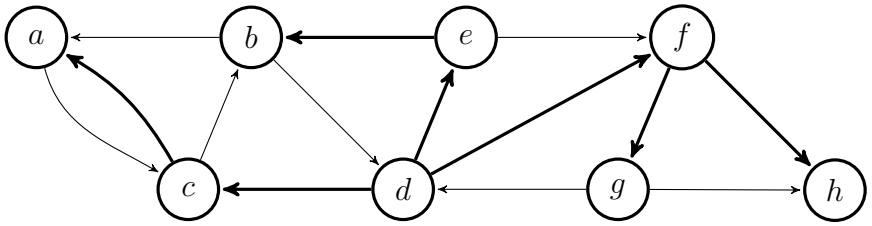
Input: grafo non diretto $G = (V, E)$.
Output: `TRUE` se G è bipartito e `FALSE` altrimenti.

```
1: global variables
2:     Color ↤ array di |V| elementi
3:     Parent ↤ array dei padri
4:     Parity ↤ array della bipartizione
5:     U ↤ queue, inizialmente vuota
6:     W ↤ queue, inizialmente vuota
7: end global variables
8: function DFS(G)
9:     test=TRUE
10:    for u ∈ V do
11:        Color[u]=BIANCO
12:    for u ∈ V do
13:        if Color[u]==BIANCO then
14:            Parent[u] = u
15:            Parity[u] = 0
16:            test=DFS-Visit(G,u)
17:            if test==FALSE then
18:                return FALSE
19:    return TRUE
20: function DFS-Visit(G,u)
21:    Color[u]=GRAY
22:    for v ∈ Adj[u] do
23:        if Color[v]==BIANCO then
24:            Parent[v] = u
25:            Parity[v] = 1 − Parity[u]
26:            test=DFS-Visit(G,u)
27:            if test=FALSE then
28:                return FALSE
29:        else
30:            if Parity[u] == Parity[v] then
31:                return FALSE
32:    Color[u]=NERO
33:    if Parity[u] = 0 then
34:        U.enqueue(u)
35:    else
36:        W.enqueue(v)
37:    return TRUE
```

Finalmente consideriamo il caso in cui la condizione presente in linea 30 non si verifica mai. Allora ogni vertice u sarà aggiunto ad una sola tra due liste: se $Parity[u] = 0$ allora u viene aggiunto alla lista U (linea 34) e viene aggiunto alla lista W altrimenti (linea 36). Questa bipartizione viene riportata dall'algoritmo principale (linea 19). □

Esercizio 3 (I. Salvo)**.** Si consideri il grafo diretto G illustrato nella figura qui sotto e l'albero T formato formato dagli archi evidenziati. L'albero T può essere prodotto da una ricerca in profondità?

- In caso positivo, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T e specificare il nodo da cui parte la ricerca e il tipo degli archi ottenuto a seguito della visita.
- In caso negativo, rimpiazzare un arco di T con un altro arco di G in maniera da ottenere un albero T' con la proprietà che T' possa essere un albero di ricerca per una ricerca in profondità. In tal caso, esibire una rappresentazione di G tramite liste di adiacenza in grado di produrre T' e specificare il nodo da cui parte la visita e il tipo degli archi ottenuto a seguito della visita.



In fine, che succede se si considera lo stesso grafo G dove però gli archi non sono diretti?

Soluzione 3. No, T non può essere ottenuto da una ricerca in profondità, per spiegare il perché è necessario analizzare ogni singolo vertice di G come vertice di partenza.

- a non può essere il vertice di partenza perché altrimenti l'algoritmo dovrebbe visitare c ma (a, c) non fa parte di T;
- b non può essere il vertice di partenza perché altrimenti l'algoritmo dovrebbe visitare uno tra a e d ma sia (b, a) che (b, d) non fa parte di T;

- c non può essere il vertice di partenza perché dopo aver visitato a, l'algoritmo dovrebbe visitare b ma l'arco (c, b) non fa parte di T.

- e non può essere il vertice di partenza perché dopo aver visitato b, l'algoritmo dovrebbe visitare uno tra a e d ma sia (b, a) che (b, d) non fa parte di T;

- g non può essere il vertice di partenza perché altrimenti l'algoritmo dovrebbe visitare uno tra d e h ma sia (g, d) che (g, h) non fanno parte di T;

- il vertice h non avendo archi uscenti è ininfluente per la risposta all'esercizio: se h viene selezionato come vertice di partenza allora esso farà parte di un albero di cui h è l'unico vertice. Se altrimenti h non è il vertice di partenza, h è una foglia del albero di ricerca con g o f come padre. In sintesi, T può essere prodotto da una ricerca in profondità se e solo se T_h può essere prodotto da una ricerca in profondità, dove T_h è il sottografo di G_h ottenuti da T e G rimuovendo, rispettivamente, il vertice h e tutti gli archi ad esso incidenti.

- l'ultimo vertice da analizzare è d. La sequenza $d \to f \to h$ seguita da $f \to g$ è fino a questo punto una legittima sequenza di ricerca in profondità. Adesso l'algoritmo deve visitare uno dei vertici adiacenti a d che non sia stato già visitato, cioè o c o e. Se l'algoritmo visita è per primo c, allora il vertice b dovrebbe essere visitato per la prima volta da c usando l'arco (c, b) che però non fa parte di T. Infine se l'algoritmo visita e per primo, allora il vertice a dovrebbe essere visitato per la prima volta da b usando l'arco (b, a) che però non fa parte di T. E' abbastanza immediato anche che scegliere sequenze iniziali diverse da $d \to f \to h$ $f \to g$ producono situazioni simili a quelle dei primi cinque vertici considerati.

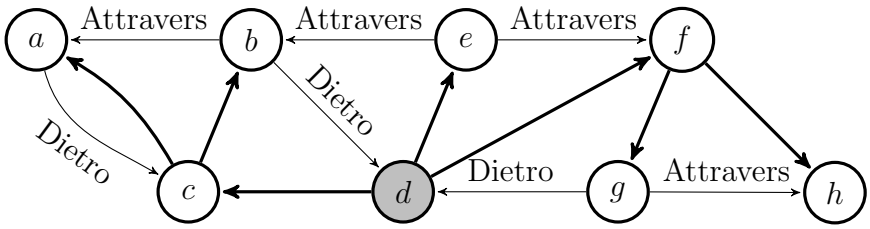
In sintesi, abbiamo mostrato come nessun vertice può essere scelto come vertice iniziale per una ricerca in profondità di G.

Consideriamo ora T', l'albero ottenuto da T rimuovendo l'arco (e, b) e includendo l'arco (c, b). Mostriamo ora che T' può essere ottenuto da una ricerca in profondità. Prima specifichiamo le liste di adiacenza:

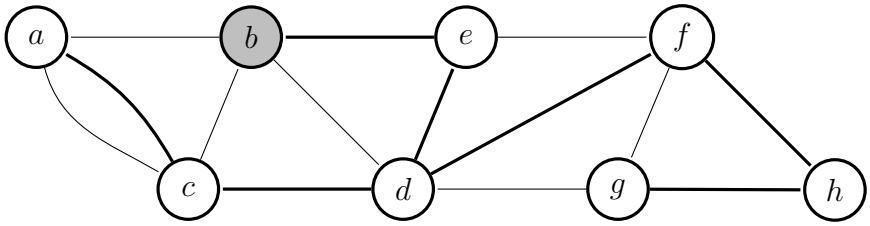
- $a : c$

- $b : a \mapsto d$
- $c : a \mapsto b$
- $d : f \mapsto c \mapsto e$
- $e : b \mapsto f$
- $f : h \mapsto g$
- $g : d \mapsto h$
- $h :$

La figura sotto rappresenta G con l'albero T' evidenziato e gli archi non evidenziati sono etichettati con il loro tipo. Ora è evidente che avendo come vertice di partenza d, l'albero T' è il prodotto della ricerca in profondità su G.



Nel caso G senza orientazione degli archi, la risposta sarebbe comunque negativa ma per motivi differenti. Ci limitiamo ad esibire un albero T' che può essere ottenuto da una ricerca in profondità dove il vertice colorato è quello da dove parte la ricerca. □



References

[1] Thomas H Cormen, Charles E Leiserson, Ronald L Rivest, and Clifford Stein. Introduction to algorithms. 2022.