Esercitazione 10: Final Problem Session

Giacomo Paesani

May 19, 2025

Esercizio 1. Dato un albero T di n nodi, rappresentato tramite il vettore dei padri P, dare lo pseudo-codice di un algortimo che produce in tempo $\mathcal{O}(n)$ la lista dei vertici di T_u, il sotto-albero radicado in un vertice u di T.

Soluzione 1. Per risolvere questo esercizio, è necessario construire una lista dei discendenti di u, cioè tutti i vertici v di T per cui esiste un cammino da u a v in T. La soluzione proposta è data dall'Algoritmo 1. Prima di tutto dal vettore dei padri P si costruiscono le liste di adiacenza di T tramite il ciclo **for** di Linea 3. A questo punto, possiamo inizializzare una lista vuota S che riempiamo con i discendenti di u tramite la chiamata alla funzione DESC.

Algorithm 1

Input: vettore dei padri P, vertice u
Output: lista dei discendenti di u

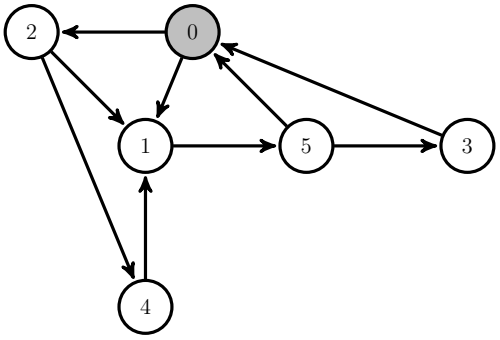
```
 1: function TreeDescendant(P,u)
 2:     n = |P| − 1
 3:     for i = 0, ..., n do
 4:         if P[i] ≠ i then
 5:             P[i] = Append.Adj[i]
 6:     S = ∅ ↤ lista vuota
 7:     S =Desc(S,u)
 8:     return S
 9: function Desc(S,u)
10:     u = Append.S
11:     for v ∈ Adj[u] do
12:         S =Desc(S,v)
13:     return S
```

La funzione DESC è il fulcro della seguente soluzione: prende in input una lista di vertici (che è vuota alla prima chiamata) S, un vertice u e restituisce la lista S in cui sono stati aggiunti tutti i discendenti di u. Per far questo, si aggiunge u ad S (Linea 10) e poi si aggiungono tutti i discendenti v dei figli di u, cioè tutti i vertici che hanno u come padre, e quindi si chiama ricorsivamente la funzione DESC con input (S, v) (Linea 12).

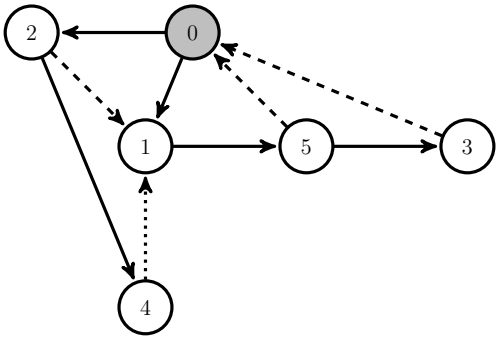
Separando la creazione delle liste di adiacenza dalle chiamate ricorsive alla funzione DESC fa si che questo algoritmo abbia tempo di esecuzione $\mathcal{O}(n)$: infatti, per la creazione delle liste di adiacenza usiamo tempo $\mathcal{O}(n)$ e c'è al più una chiamata ricorsiva della funzione DESC per ogni vertice $v \in V(T)$ e ogni tale chiamata si risolve in $\mathcal{O}(1)$. □

Esercizio 2. Sia G il grafo in figura in cui le liste di adiacenza sono ordinate in senso crescente degli indici. Allora, determinare:

- l'albero di ricerca ottenuto in seguito ad una ricerca in profondità (DFS) di G con radice il vertice 0;
- specificare quali sono gli archi di attraversamento, in avanti e all'indietro in seguito a tale DFS.



Soluzione 2. Allora la soluzione è data dalla seguente figura dove gli archi interi sono quelli dell'albero, quelli tratteggiati sono quelli all'indietro e quelli puntinati sono quelli di attraversamento. Da notare che non ci sono archi in avanti in questo caso. □



Esercizio 3 (A. Monti)**.** Sia G il grafo in figura in cui le liste di adiacenza sono ordinate in senso crescente degli indici.

1. Considerare una visita in profondità (DFS) con radice il vertice 2, allora:

   1a. riportare nell'ordine i vertici di G che vengono effettivamente visitati;

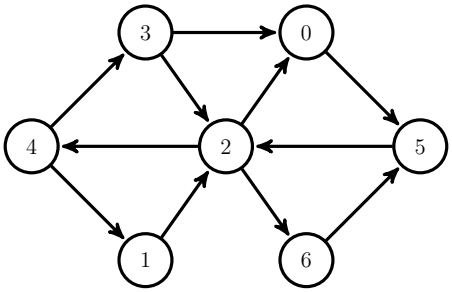
   1b. individuare gli archi in avanti, all'indietro, di attraversamento che sono individuati durante la visita.

2. Considerare una visita in ampiezza (BFS) con radice il vertice 2, allora riportare nell'ordine i vertici di G che vengono effettivamente visitati.

3. Qual'è il minimo numero di archi da eliminare da G perché il grafo ottenuto risulti avere ordinamenti topologici e quali sono questi archi?

4. Eliminare da G gli archi ottenuti al punto precedente in modo che il grafo ottenuto G' risulti avere ordinamenti topologici, allora determinare quanti e quali sono gli ordinamenti topologici di G'.

5. Eliminare le direzioni degli archi da G ottenendo un grafo G'' non diretto. Determinare i ponti di G''.



Soluzione 3. 1. Eseguendo la DFS con il vertice 2 come radice si ottiene $(1a)$ l'ordine di visita dei vertici $2, 0, 5, 4, 1, 3, 6$; inoltre gli archi all'indietro sono $(5, 2)$, $(1, 2)$ e $(3, 2)$, mentre gli archi di attraversamento sono $(3, 0)$ e $(6, 5)$ e non ci sono archi in avanti;

2. eseguendo la BFS con il vertice 2 come radice si ottiene l'ordine di visita dei vertici $2, 0, 4, 6, 5, 1, 3$;

3. il grafo G contiene solo quattro cicli, $C_1 = (2, 0, 5)$, $C_2 = (2, 6, 5)$, $C_3 = (2, 4, 1)$ e $C_4 = (2, 4, 3)$. In particolare, C_1 e C_3 non hanno archi in comune e quindi è necessario eliminare almeno due archi da G per renderlo aciclico e quindi con ordinamenti topologici. Dimostriamo che è sufficiente eliminare due archi da G e questi sono $(5, 2)$ e $(2, 4)$: infatti il primo interseca C_1 e C_2 mentre il secondo interseca C_3 e C_4.

4. eliminando gli archi $(5, 2)$ e $(2, 4)$ da G otteniamo i seguenti quattro ordini topologici di G': $(4, 3, 1, 2, 0, 6, 5)$, $(4, 1, 3, 2, 0, 6, 5)$, $(4, 3, 1, 2, 6, 0, 5)$ e $(4, 1, 3, 2, 6, 0, 5)$. Questa varietà si ottiene per l'intercambiabilità tra 1 e 3 e tra 0 e 6.

5. il grafo G'' non ha ponti. Infatti per ogni coppia di vertici del grafo, esistono due cammini, distinti sia negli archi che nei vertici, che li collega: questo certifica che non esistono ne punti di articolazione ne ponti di G. □

Esercizio 4. Dato un intero n, sia c_n il numero di stringhe binarie lunghe n in cui non compaiono due zeri consecutivi. Fornire uno pseudo-codice che descrive un algoritmo, che dato $n \geq 1$, calcola il valore di c_n in tempo $\mathcal{O}(n)$. E se invece volessi calcolare d_n, cioè il numero di stringhe binarie lunghe n in cui non compaiono tre zeri consecutivi?

Soluzione 4. Una delle possibili soluzioni è esposta nell'Algoritmo 2. L'idea è di costruire il caso base c_1 e poi ricorsivamente c_{n+1} a partire da c_n. Per semplificare la spiegazione di questo esercizio definiamo come a_n e b_n come il numero di stringhe binarie lunghe n in cui non compaiono due zeri consecutivi in cui l'ultimo elemento è uno 0 e un 1, rispettivamente. E' quindi chiaro che $c_n = a_n + b_n$.

Algorithm 2

Input: intero n
Output: numero di stringhe binarie di lunghezza n senza due 0 consecutivi

```
1: function NoConsecutiveZeros(n)
2:     i = 1
3:     a = 1
4:     b = 1
5:     c = 1
6:     while i < n do
7:         b = a
8:         a = c
9:         c = a + b
10:        i = i + 1
```

Allora, una stringa rappresentata da a_{n+1}, e che quindi termina con 1, ha il prefisso lungo n in cui l'ultimo termine può essere sia uno 0 che un 1: abbiamo che $a_{n+1} = a_n + b_n = c_n$. Una stringa rappresentata da b_{n+1}, e che quindi termina con 0, ha il prefisso lungo n in cui l'ultimo termine deve essere necessariamente uno 1: abbiamo che $b_{n+1} = a_n$. Si osserva facilmente che vengono calcolati esattamente n valori c_i e ognuno di questi calcoli si svolge in tempo $\mathcal{O}(1)$: l'algoritmo si risolve in $\mathcal{O}(n)$.

Per implementare la soluzione prima descritta è necessario occupare uno spazio pari a $\prime(n)$ di memoria, cioè il valori a_i, b_i e c_i, per ogni $1 \leq i \leq n$. In realtà molti di questi dati diventano superflui una volta utilizzati: allora la variabile a contiene il valore di a_i, b contiene il valore di b_i e c contiene il valore di c_i e quindi per calcolare a_{i+1}, b_{i+1} e c_{i+1} è sufficiente aggiornare come prima descritto di valore di a, b e c e quindi usando $\mathcal{O}(1)$ spazio.

Supponiamo vogliamo calcolare d_n, allora definiamo a_n, b_n e c_n come il numero di stringhe di lunghezza n che terminano con 1, 10 e con 00, rispettivamente. Allora abbiamo necessariamente che $d_n = a_n + b_n + c_n$ e che $a_{n+1} = d_n$, $b_{n+1} = a_n$ e $c_{n+1} = b_n$. con il caso base: $d_1 = 2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$ e

$c_2 = 1$ e $d_2 = 4$. □

Esercizio 5. Dati due interi k e n, con $1 \leq k \leq n$, definiamo $P(k, n)$ come il numero di differenti partizioni dei numeri da 1 a n in k sotto-insiemi non vuoti. Fornire in pseudo-codice un algoritmo che calcola $P(k, n)$ in tempo $\mathcal{O}(k \cdot n)$.

Soluzione 5. Per risolvere questo esercizio si suggerisce di adottare un approccio di programmazione dinamica. Costruiamo una matrice P con k righe ed n colonne. Come caso base, è facile osservare che $P(1, j) = 1$: se è possibile avere un solo sotto-insieme nella partizione, allora ogni numero deve essere necessariamente assegnato nell'unico sotto-insieme a disposizione.

Si considera una qualsiasi partizione dei numeri da 1 a j in i sotto-insiemi non vuoti e abbiamo due casi: o (1) il numero j è in un singleton della partizione oppure (2) il numero j non è in un singleton della partizione. Allora, il numero delle partizioni che soddisfano il caso (1) è pari alle partizioni dei numeri da 1 a $j - 1$ in $i - 1$ sotto-insiemi non vuoti e quindi $P(i - 1, j - 1)$. Infine, il numero delle partizioni che soddisfano il caso (2) è pari alle partizioni dei numeri da 1 a $j - 1$ in i sotto-insiemi non vuoti moltiplicato i cioè il numero di diversi elementi della partizione in cui il numero j può essere posizionato, e quindi $i \cdot P(i, j - 1)$. Allora in totale abbiamo che per $2 \leq i \leq j \leq n$ si ha che $P(i, j) = P(i - 1, j - 1) + i \cdot P(i, j - 1)$.

Algorithm 3

Input: interi k e n
Output: numero di partizioni in k sotto-insiemi non vuoti dei numeri da 1 a n

```
1:  function CountPartition(k,n)
2:      for i = 1, ..., k do
3:          for j = 1, ..., n do
4:              if i > j then
5:                  P(i, j) = 0
6:              else if i = 1 then
7:                  P(i, j) = 1
8:              else
9:                  P(i, j) = P(i − 1, j − 1) + i · P(i, j − 1)
10:     return P(k, n)
```

La soluzione proposta nell'Algoritmo 3 implementa proprio l'idea sopra descritta. Si osserva che il tempo di esecuzione dell'algoritmo è di $\mathcal{O}(k \cdot n)$:

infatti ogni iterazione dei cicli **for** la computazione del numero $P(i, j)$ si esegue in tempo costante, cioè $\mathcal{O}(1)$. □

Esercizio 6. Dato un intero $n \geq 2$, definiamo con x_n il minimo numero di operazioni con cui è possibile ottenere n partendo dal numero 2 e potendo effettuare le sole 3 operazioni: di incremento di 1, prodotto per due e prodotto per tre; e con y_m il numero totale di modi (non per forza con un numero minimo di operazioni) per ottenere n con tali operazioni. Fornire un algoritmo che dato un intero n calcola sia x_n che y_n in tempo $\mathcal{O}(n)$.

Soluzione 6. Una delle possibili soluzioni per questo esercizio è presentata nell'Algoritmo 4.

Algorithm 4

Input: numero n
Output: interi x_n e y_n

```
1: global variables
2:     X ↤ array di n + 1 elementi
3:     Y ↤ array di n + 1 elementi inizializzato a +∞
4: end global variables
5: function FROM2TON(n)
6:     if Y(n) ≠ +∞ then
7:         return (X(n), Y(n))
8:     else if n = 0 or n = 1 or n ∉ ℕ then
9:         x_n = +∞
10:        y_n = 0
11:    else if n = 2 then
12:        x_n = 0
13:        y_n = 1
14:    else
15:        (a_{-1}, b_{-1}) =FROM2TON(n − 1)
16:        (a_2, b_2) =FROM2TON(n/2)
17:        (a_3, b_3) =FROM2TON(n/3)
18:        x_n = min{a_{-1}, a_2, a_3} + 1
19:        y_n = b_{-1} + b_2 + b_3
20:        X(n) = x_n
21:        Y(n) = y_n
22:    return (x_n, y_n)
```

La spiegazione inizia calcolando x_n: per ottenere n col minor numero

di operazioni è sufficiente confrontare il minor numero di operazioni per ottenere rispettivamente $n-1$, $n/2$ e $n/3$, prendere la minima ed aggiungere 1. Infatti, qual'è l'ultima operazione che necessaria per ottenere n? Se tale operazione è l'incremento di 1 allora si considera x_{n-1}, se tale operazione è la moltiplicazione per 2 allora si considera $x_{n/2}$ e, similmente, se tale operazione è la moltiplicazione per 3 allora si considera $x_{n/3}$. Allora, necessariamente abbiamo che $x_n = \min\{x_{n-1}, x_{n/2}, x_{n/3}\} + 1$.

Per calcolare y_n, la situazione è leggermente diversa: infatti è necessario contare tutte le possibili combinazioni di operazioni disponibili che hanno come risultato n. Per far ciò, si sommano i modi per ottenere $n-1$, $n/2$ e $n/3$ con tali operazioni e quindi si ha che $y_n = y_{n-1} + y_{n/2} + y_{n/3}$.

L'algoritmo proposto usa due vettori X e Y che permettono di salvare i valori *non banali* di x_n e y_n (Linea 20 e 21 e di calcolarli al più una volta (Linea 6), riducendo la complessità dell'algoritmo. Se il valore n dato in input è pari a 0 o 1 o non è intero allora è chiaro che partendo da 2 è impossibile ottenere n eseguendo solo le operazioni a disposizione. Allo stesso modo, se $n = 2$ sono necessarie 0 operazioni per ottenere tale numero a partire da 2 e c'è solo una sequenza (quella banale).

La soluzione qui descritta ha un tempo di esecuzione pari a $\mathcal{O}(n)$. Infatti, per ogni i da 0 a n si calcolano i valori di x_i e y_i sfruttando i valori di x_j e y_j con $0 \leq j < i$ in tempo $\mathcal{O}(1)$. □